I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \in]0;+\infty[$.
D'après le théorème de la valeur intermédiaire, pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que :

Pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel x tel que $\mathrm{e}^x = a$
Cette solution se note $x = \ln a$.

1 DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = \mathrm{e}^y$$

REMARQUES

– On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
– $\mathrm{e}^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
– $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ donc $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
– Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

EXEMPLE

L'équation $\mathrm{e}^x = 5$ admet une unique solution le réel $x = \ln 5 \simeq 1{,}61$ (arrondi au centième)
Vérification : $\mathrm{e}^{\ln 5} = 5$.

2 CONSÉQUENCES

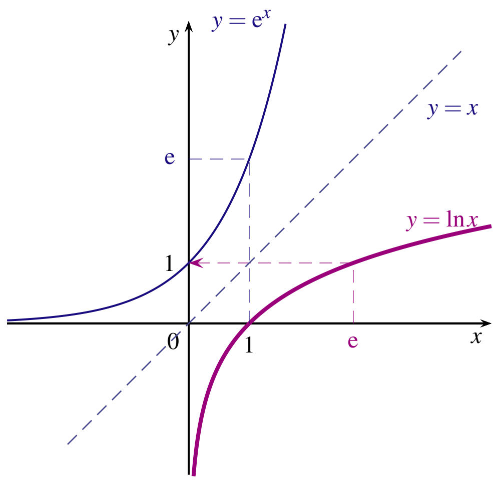
1. Pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

DÉMONSTRATION

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = x$ donc $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow \ln(y) = x$ soit $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

On dit que la fonction logarithme népérien est **la fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont **symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation** $y = x$.



II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

REMARQUES

- John Napier inventa en 1617 les logarithmes, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre), et une méthode de calcul transformant les multiplications en additions.
- La fonction exponentielle transforme une somme en produit, sa fonction réciproque, **la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme**.

2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2} \ln a$

EXEMPLES

a) $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ = ...

b) $\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$ = ...

c) $\ln 64$ = ... = ...

d) $\ln\left(\sqrt{5}\right)$ = ...

SIMPLIFIER LES EXPRESSIONS SUIVANTES :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$

$B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln 3$

III ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 DÉRIVÉE

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\ln'(x)\times\mathrm{e}^{\ln x}=\ln'(x)\times x$.
Or pour tout réel $x>0$, $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x}=x$ d'où $f'(x)=1$
Ainsi pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)\times x=1$ donc $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. CQFD

2 VARIATION

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

DÉMONSTRATION

La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. Or si $x>0$ alors, $\dfrac{1}{x}>0$.
La dérivée de la fonction ln est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

CONSÉQUENCES

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes :

Pour tous réels a et b strictement positifs :
- $\ln a=\ln b$ si, et seulement si, $a=b$
- $\ln a>\ln b$ si, et seulement si, $a>b$

Comme $\ln 1=0$ alors on en déduit **le signe de** $\ln x$ **sur** $]0;+\infty[$:

Pour tout réel x strictement positif :
- $\ln x=0$ si, et seulement si, $x=1$
- $\ln x>0$ si, et seulement si, $x>1$
- $\ln x<0$ si, et seulement si, $0<x<1$

Comme la fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante et que pour tout réel $x>0$, $\ln x\in\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire :

Pour tout réel k, l'équation $\ln x=k$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution $x=\mathrm{e}^{k}$.

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

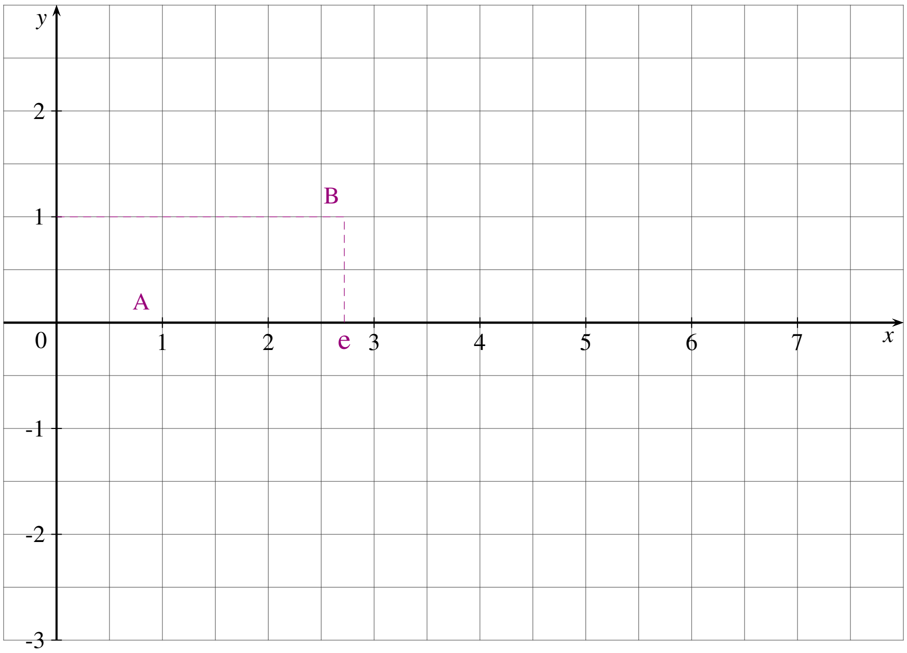
Notons $\mathscr{C}_{\ln}$ la courbe représentative de de la fonction logarithme népérien.

- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ donc les points $A(1;0)$ et $B(e;1)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ est $\ln'(1) = 1$.
  Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ est $\ln'(e) = \dfrac{1}{e}$.

  Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ a pour équation :

  $$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x$$

  La tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.
- Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors la dérivée de la fonction ln est strictement décroissante.
  Par conséquent, **la fonction** ln **est CONCAVE** sur $]0;+\infty[$.



IV APPLICATION - DETERMINER UN SEUIL

Exercice résolu n° 21 page 96.

Exercices n° 8 page 91 + n° 51 à 54 page 98 + n° 59 page 99 + n° 89, 90 et 92 page 101.
n° 113 page 104 + n° 118 et 123 pages 105 et 106.